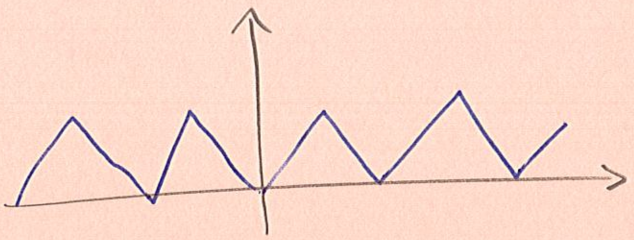
TD : Courbes param.

Exercice 1

a)

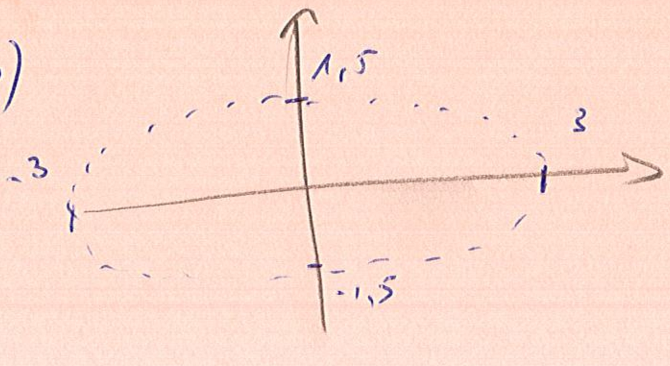


Cette courbe est le graphe d'une fonction on peut donc chercher de la forme $(t, f(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$.

- on peut écrire f comme la fonction 1-périodique définie par $f(t) = 2|t|$ pour $t \in [-1/2, 1/2]$.
- on peut définir directement f par :

$$f : t \longmapsto 1 - 2\big|\,|t - \lfloor t \rfloor| - 1/2\,\big|$$

b)



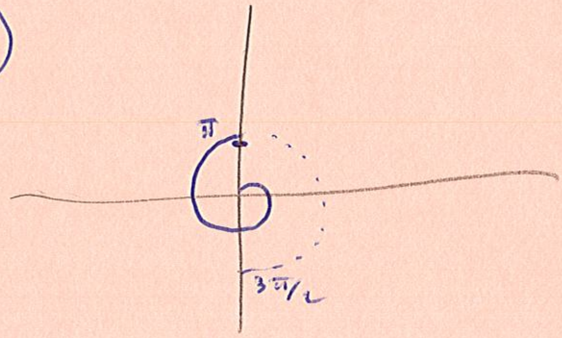
c'est une ellipse centrée en O et d'équation

$$\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{9}y^2 = 1$$

En posant $I =]0, 2\pi[$ et $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 3\sin t \\ 1,5\cos t \end{pmatrix}$

on a bien une paramétrisation de Γ.

c)



c'est une spirale

on a $I = \mathbb{R}^+$ et

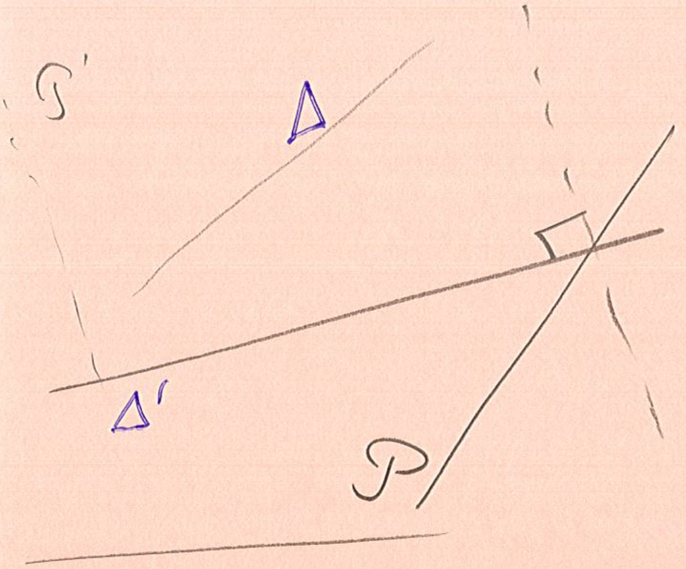
$$\gamma(t) = t\begin{pmatrix} \sin(at) \\ \cos(at) \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $a > 0$, on remarque que la spirale fait un tour en π unité de temps on a alors $a = 2$

d) Même chose que précédement, sauf que $a = 1$. I.e :

$$I = \mathbb{R}^+ \qquad \gamma(t) = t\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 :



on a

$$\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ x + y + z = 1 \right\}$$

* La droite Δ' est l'intersection du plan $\mathcal{P}'$ (qui est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et qui contient Δ) avec le plan $\mathcal{P}$.

* le plan $\mathcal{P}'$ est unique (car Δ n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}$). Le plan $\mathcal{P}'$ est

$$\mathcal{P}' = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dirige Δ — normale à $\mathcal{P}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & (x-1) \\ 1 & 1 & (y+1) \\ 0 & 1 & (z-2) \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

on développe le déterminant par rapport à la première colonne :

$$2(z-2-y-1) - (z-2-x+1) = 0$$

$$z - 2y + x = 5$$

et $\mathcal{P}' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ z - 2y + x = 5 \right\}$

La droite Δ' satisfait

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z + 7/3 \\ y = -4/3 \end{cases}.$$

$$\iff \begin{cases} x = -1 \times t + 7/3 \\ y = 0 \times t - 4/3 \\ z = 1 \times t + 0 \end{cases}$$

et Δ est la courbe paramétrée $I = \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} -t + 7/3 \\ -4/3 \\ t \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 3 :</u>

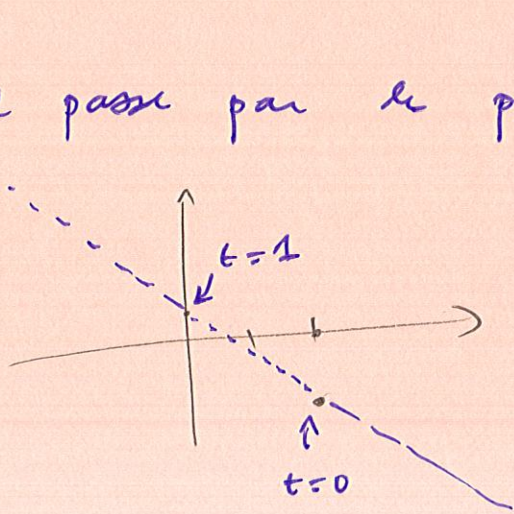
1) On a $r = \dfrac{1}{2\cos\theta + 3\sin\theta}$

$$\iff \underbrace{2r\cos\theta}_{=x} + 3\underbrace{r\sin\theta}_{=y} = 1$$

et on reconnait l'équation d'une droite.

$$2x + 3y = 1$$

Elle passe par les points $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.



Posons alors $I = \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}(1-t)$$

Exercice I :

Soit $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

$$\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} 1+\alpha \cos t \\ \tan t + \alpha \sin t \end{pmatrix} \qquad \alpha > 0.$$

on a $\phi'(t) = \begin{pmatrix} -\alpha \sin t \\ \frac{1}{\cos^2 t} + \alpha \cos t \end{pmatrix}$

$$\phi''(t) = \begin{pmatrix} -\alpha \cos t \\ \frac{2}{\cos^2 t} \tan t - \alpha \sin t \end{pmatrix}$$

$$\phi'''(t) = \begin{pmatrix} \alpha \sin t \\ 4 \frac{\tan^2 t}{\cos^2 t} + \frac{2}{\cos^4 t} - \alpha \cos t \end{pmatrix}$$

1) Etude de pts stationnaires :

a) $\underline{\underline{\alpha = 1}}$ $\qquad \phi'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 + n\pi \\ t = \pi + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \{ t = \pi \in I$

$$\phi''(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi'''(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avec la notation du cours on a : $p = 2$ et $q = 3$.

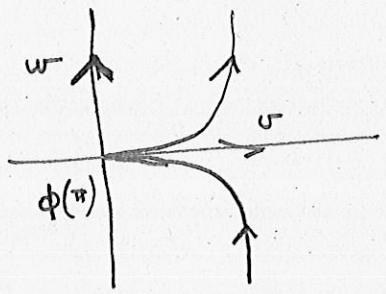
le point $\phi(\pi)$ est un point de rebroussement de 1ère espèce.

$$\phi(h+\pi) = \phi(\pi) + \frac{h^2}{2}\phi''(\pi) + \frac{h^3}{6}\phi'''(\pi) + |h|^3 \omega(h) \quad \text{où } \omega(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{h}{3} \end{pmatrix} + |h|^3 \omega(h)$$

∴ on a donc au voisinage de $(0,0)=\phi(\pi)$: on pose ②

$v=\phi''(\pi)$ et $w=\phi'''(\pi)$



remarque : $y : t \mapsto \tan t + \sin t$ est :

* négatif sur $]-\frac{\pi}{2},\pi[$
* positif sur $]\pi,\frac{3\pi}{2}[$.

on peut aussi "lire" l'orientation avec le sens de w.

b) Si $\alpha \in]0,1[$

$$\phi'(t)=0 \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} t = 0 + m\pi \\ \cos t = (-\alpha)^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \quad (*)$$

or $|-\alpha|^{-\frac{1}{3}} > 1$ car $\alpha \in]0,1[$ et $(*)$ n'a pas de solution.

∴ il n'y a pas de pt stationnaire.

Si $\alpha > 1$

$$\phi'(t)=0 \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} t = m\pi \\ t = \mathrm{Acos}\left((-\alpha)^{-\frac{1}{3}}\right) \end{cases} \quad \underline{\text{ssi}} \quad \begin{cases} t=\pi \\ t = \mathrm{Acos}\left(-\alpha^{-\frac{1}{3}}\right) \\ \text{ou } t = 2\pi - \mathrm{Acos}\left(-\alpha^{-\frac{1}{3}}\right) \end{cases}$$

∴ il y a pas de pt stationnaire car $\alpha > 1 \Rightarrow 0 < \mathrm{Acos}\left(-\alpha^{-\frac{1}{3}}\right) < \pi$

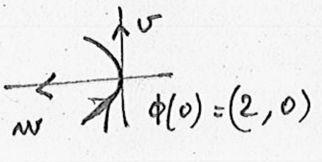
et $\pi < 2\pi - \mathrm{Acos}\left(-\alpha^{-\frac{1}{3}}\right) < \frac{3\pi}{2}$

2) Etude des tangentes verticales / horizontales :

a) si $\alpha = 1$:

* en le pt stationnaire $(t=\pi)$ la tg n'est pas vertical car $\phi''(\pi)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (horizontale)
* en les pts non stationnaires $(t \neq \pi)$ tangente vertical ssi $\phi'(t) \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\underline{\text{ssi}}$ $\sin t = 0$ $\underline{\text{ssi}}$ $t = 0$

∴ 1 pt avec tg vertical $\phi(0)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\phi'(0)=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $\phi''(0)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$



b) si $\alpha \in]0,1[$: on a un tg vertical ssi
$\phi'(t) \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

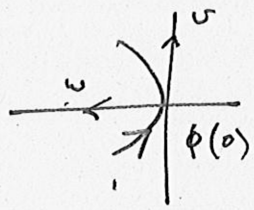
ssi $t = 0 + n\pi$, $n \in$.

ssi $t = 0$ ou $t = \pi$

$\therefore$ 2 pts avec tg vertical et pas de tg horizontale (cf 1 b)

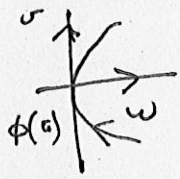
$t=0$

$\phi(0) = \begin{pmatrix}1+\alpha\\0\end{pmatrix}$; $\phi'(0) = \begin{pmatrix}0\\1+\alpha\end{pmatrix}$; $\phi''(0) = \begin{pmatrix}-\alpha\\0\end{pmatrix}$



$t=\pi$

$\phi(\pi) = \begin{pmatrix}1-\alpha\\0\end{pmatrix}$; $\phi'(\pi) = \begin{pmatrix}0\\1-\alpha\end{pmatrix}$ $\phi''(\pi) = \begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}$



c) si $\alpha \geq 1$ on a une tg vertical ssi
$\phi'(t) \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ssi $t \in \{0, \pi\}$.

$\therefore$ 2 pts avec tg vertical et 2 pts avec tg horizontal en
$t = 2\pi - \mathrm{Acos}(-\alpha^{-1/3})$ et $t = \mathrm{Acos}(-\alpha^{-1/3})$ et $t = 2\pi - \mathrm{Acos}$
(par question 1 b)

.

3) on pose $\alpha = 8$.

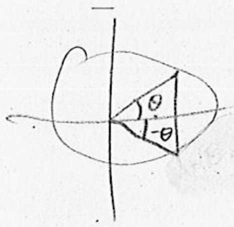
* variations de $x : t \longmapsto 1 + 8\cos t$

	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\pi/2$
variation de x.	1 ↗	9	↘ 1 ‖ 1 ↘	−7	↗ 1

variation de $y : t \longmapsto \tan t + 8 \sin t$

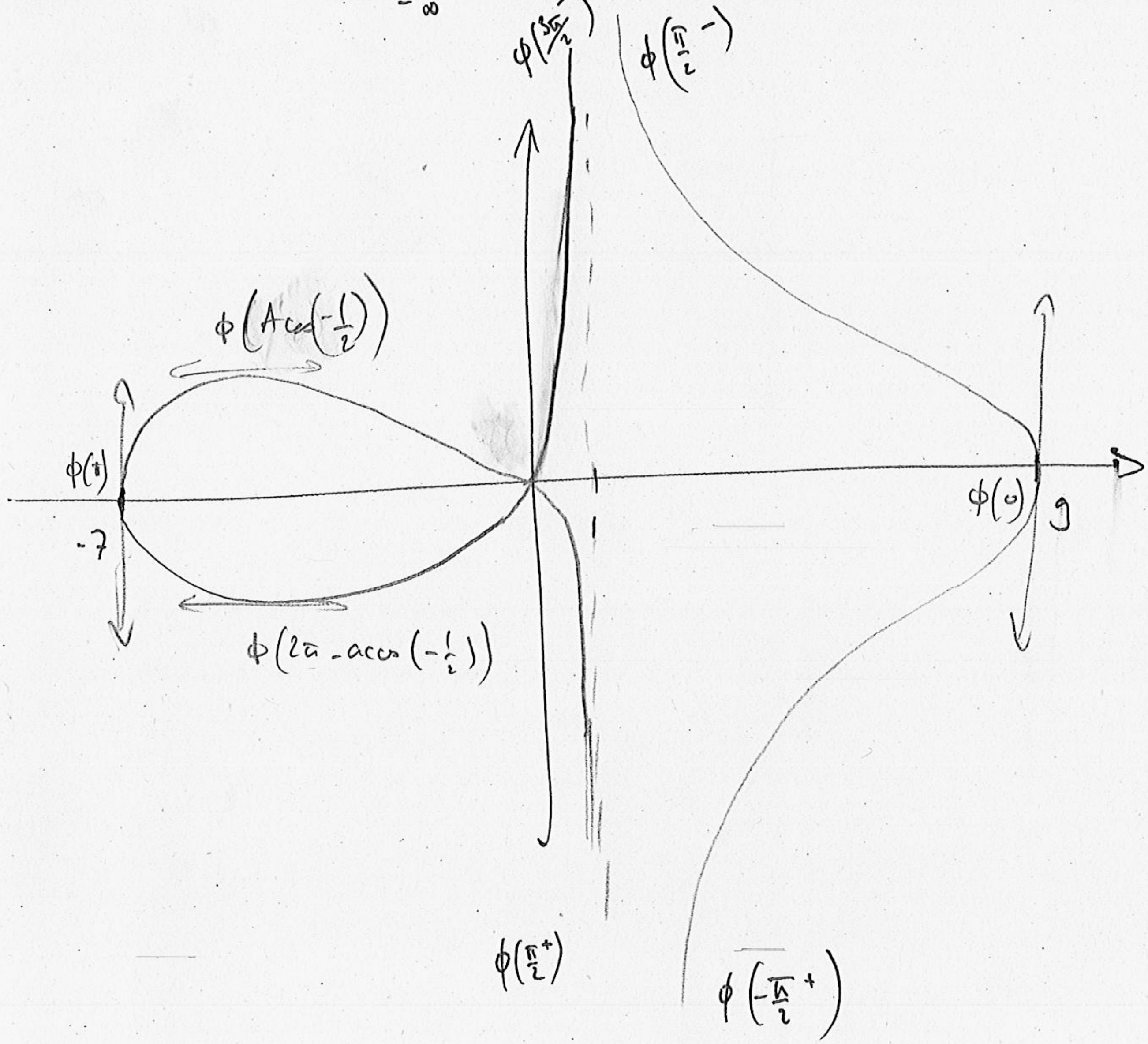
on a $y'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t} + 8 \cos t$ et $y'(t) = 0$ ssi Acos(

et $y'(t) = 0$ ssi $\cos t = -\left(\dfrac{1}{8}\right)^{1/3} = -\dfrac{1}{2}$



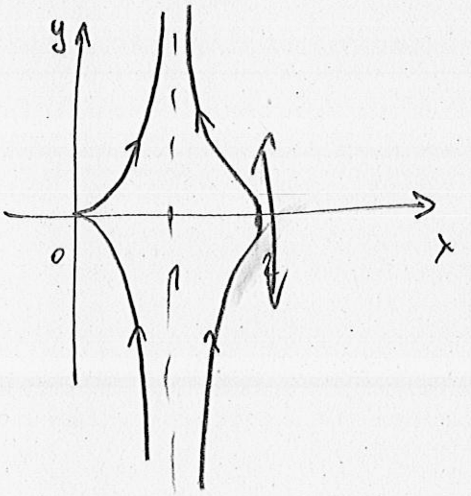
ssi $t = \operatorname{acos}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ou $t = -\operatorname{acos}\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi$

t	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\operatorname{acos}\left(-\frac{1}{2}\right)$		π		$2\pi - \operatorname{acos}\left(-\frac{1}{2}\right)$		$\frac{3\pi}{2}$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

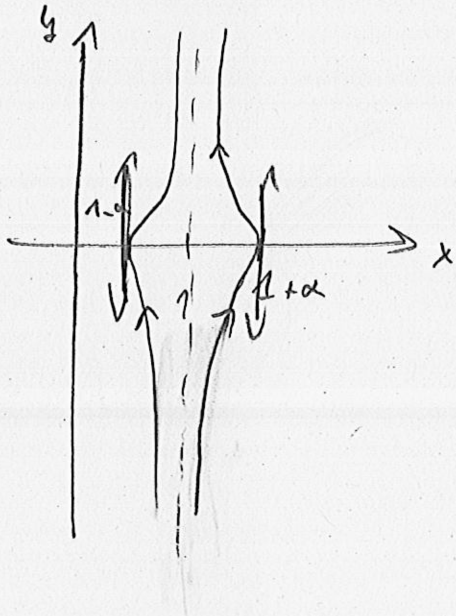


4) ...

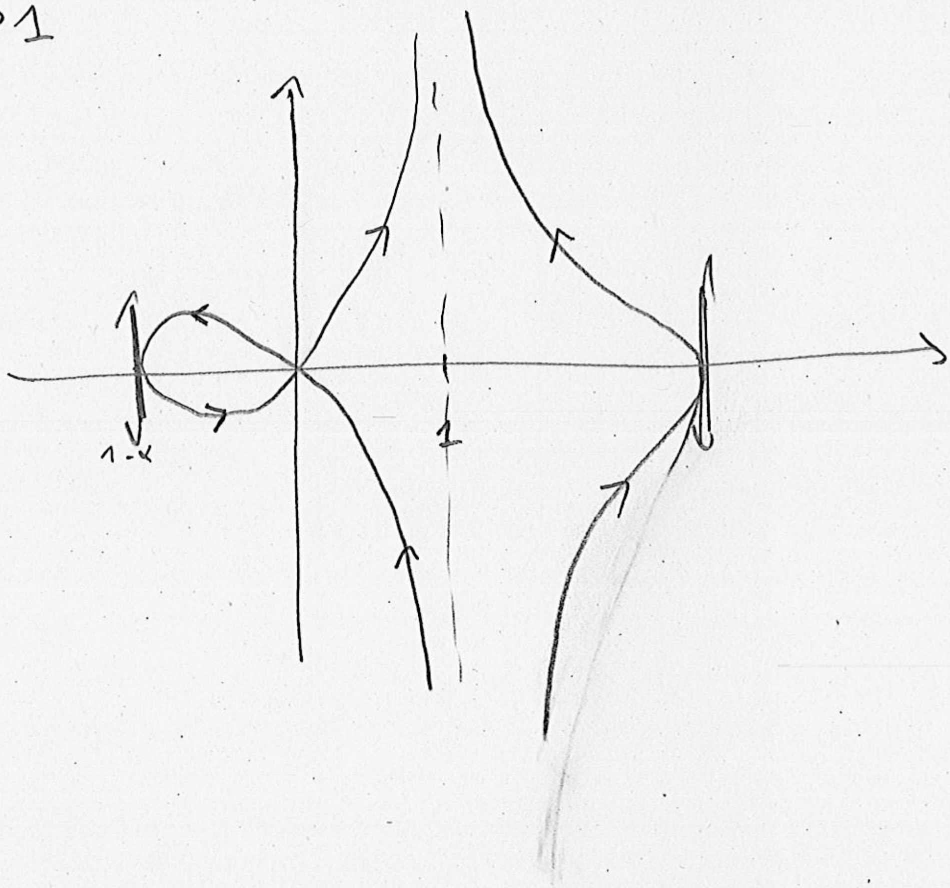
$\alpha = 1$



$\alpha \in]0,1[$



$\alpha > 1$



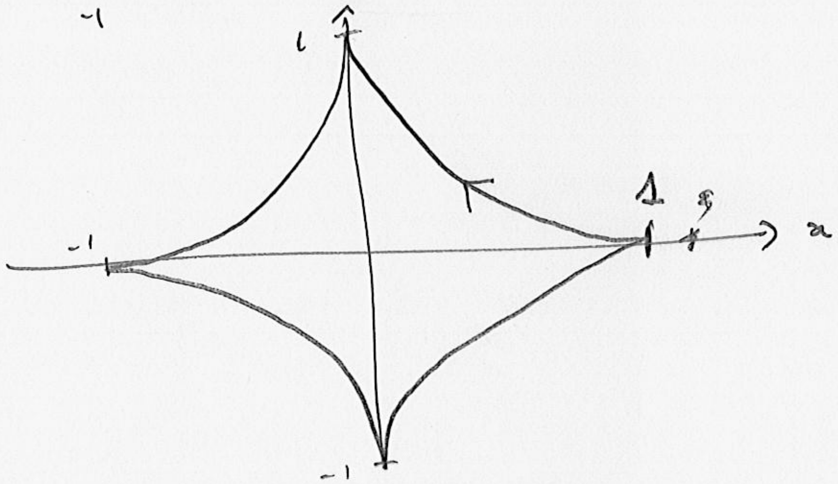
Exercice 2 :

1) $x : t \mapsto \cos^3 t \qquad x'(t) = -3\cos^2(t)\sin t$

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
signe x'	0	+	0	+	0	−	0	−	0
variations	−1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	−1

$y : t \mapsto \sin^3 t \qquad y'(t) = 3\sin^2 t \times \cos(t)$

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
signe	0	−	0	+	0	+	0	−	0
variations	0	↘	−1	↗	0	↗	1	↘	0



on a $\phi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto a\begin{pmatrix}\cos^3 t \\ \sin^3 t\end{pmatrix}$

$\phi' : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto 3a\begin{pmatrix}-\cos^2(t)\cdot\sin(t) \\ \sin^2(t)\cdot\cos(t)\end{pmatrix}$

et $\|\phi'(t)\| = 3a \sin t \cos t \underbrace{\sqrt{\cos^2(t)+\sin^2(t)}}_{=1}$

on remarque que par effet de symétrie.

$$L = \mathrm{long}(\Gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \|\phi'(t)\|\, dt = 4\int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t\, dt$$

$$= 12a\left[-\frac{1}{2}\cos^2 t\right]_0^{\pi/2} = 6a(0+1) = \underline{\underline{6a}}$$

c)

t	0		π		2π
signe x'	0	$+$		$+$	0
var	0	$\nearrow$	$R\pi$	$\nearrow$	$2\pi R$

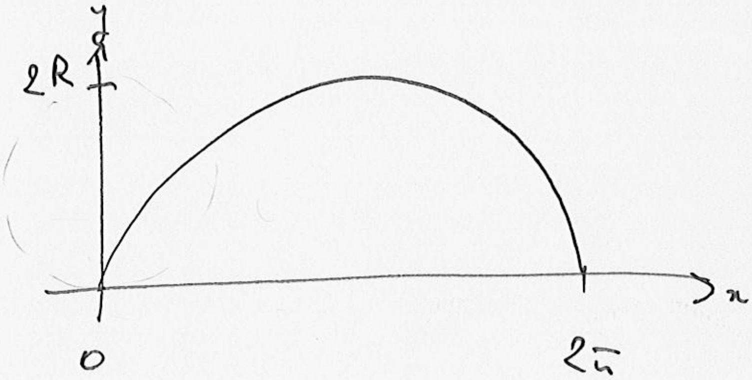
$x(t) = (t - \sin t)R$

$x'(t) = (1 - \cos t)R$

t	0		π		2π
y'	0	$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$	$2R$	$\searrow$	0

$y(t) = (1 - \cos t)R$

$y'(t) = (\sin t)R$



trajectoire d'un point sur une roue qui roule sans glisser.

on a $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto R\begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$

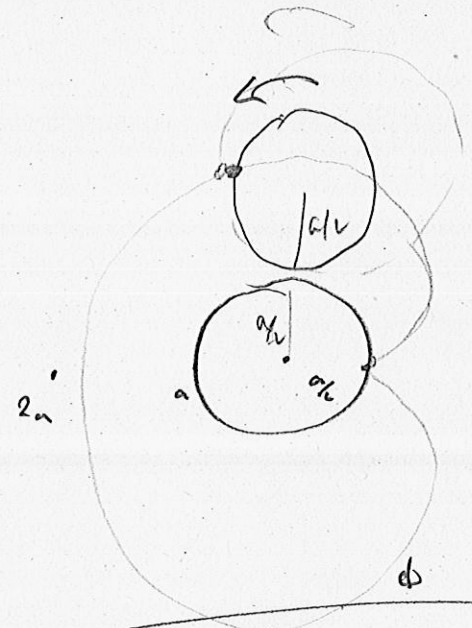
$$\|\phi'(t)\|^2 = (1-\cos t)^2 + \sin^2 t$$
$$= 1 + 1 - 2\cos t$$
$$= 2(1 - \cos t) = 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\mathrm{Long}(\Gamma) = 2R\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2R\left[-2 \times \cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= -4R(\cos\pi - \cos 0) = -4R(-1-1) = 8R$$

remarque formule de l'angle double.

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$$



Lieu d'un point d'un cercle roulant sans glissement, extérieurement, autour d'un cercle de même rayon.

$$\begin{tikzcd} \Phi : [-\pi, \pi] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\Phi"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\Psi"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} r(t) = a(1+\cos t) \\ \theta(t) = t \end{pmatrix}$$

$$(r, \theta) \longmapsto \begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta . \end{matrix}$$

Règle de la chaîne:

$$\mathrm{Jac}_\Phi(t) = \mathrm{Jac}_{\Psi\circ\varphi}(t) = \mathrm{Jac}_\Psi(\varphi(t)) \,.\, \mathrm{Jac}_\varphi(t)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a\sin t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \theta = t.$$

$$= \begin{pmatrix} -a\sin t\cos t - r\sin t \\ -a\sin^2 t + r\cos t \end{pmatrix} = \Phi'(t).$$

$$\|\Phi'(t)\|^2 = a^2\sin^2 t\cos^2 t + r^2 \cancel{\sin^2 t} + \cancel{2ar\sin^2 t\cos t}$$
$$+ a^2\sin^4 t + r^2\cancel{\cos^2 t} - \cancel{2ar\sin^2 t\cos t}$$

$$= a^2\cancel{(\cos^2 t + \sin^2 t)}\sin^2 t + r^2$$

$$= a^2\sin^2 t + a^2(1+\cos t)^2 = a^2(\sin^2 t + 1 + \cos^2 t + 2\cos t)$$

$$= 2a^2(1+\cos t) = 4a^2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

Remarque: $\cos^2(\tau) = \frac{1}{2}(1+\cos 2\tau)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \|\phi'(t)\| dt = 2a \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2a \left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 4a \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = 8a$$

[illegible]

<u>Exercice 3</u> : $A = (1,0)$ $B = (0,1)$

$$V(x,y) = (2xy + y^2 - 1 \,,\, 2xy + x^2)$$

1) $\mathcal{C} = \int_\Gamma \langle V, d\phi \rangle$ où $\Gamma = (I, \phi)$ avec $I = [0,1]$ et

$$\phi(t) = (1-t)A + tB = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{C} = \int_0^1 \left(2\cancel{(1-t)t} + \cancel{(1-t)^2} - 1\right) \times (-1) + \left(2\cancel{(1-t)t} + \cancel{(1-t)^2}\right) \times 1 \; dt$$

$$= \int_0^1 dt = 1$$

2) on cherche $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ tq

$$f(x,y) = \int 2xy + y^2 - 1 \, dx = x^2 y + y^2 x - x + \varphi_1(y)$$

où $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$.

$$f(x,y) = \int 2xy + x^2 \, dy = xy^2 + x^2 y + \varphi_2(x)$$

où $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$.

Prendre $f(x,y) = xy^2 + x^2 y - x + A$ où $A \in \mathbb{R}$.

3) on remarque que $\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A$ et $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$